スタディサプリ　私立大 数学ⅠAⅡBについて

この講座は，私立大学における個別試験を受験する生徒を対象に，実際に出題された入試問題を題材に，これまでの学習で培ってきた力をもとに，どのように問題を解きほぐし，アウトプットすべきかを伝授する講座です。

この講座を受けていただく時点でのあなたの実力が，私立大学があなたに期待している解法に対して，どこまで到達し，上回り，また下回っているかについて，予習と講義動画を通じて分野別に整理することで，あなたの今後の学習の指針となるでしょう。

山内　恵介

― 目次 ―

第１講　小問集合，三角比と平面図形 …… 2
第２講　場合の数と確率 …… 5
第３講　微分・積分 …… 8
第４講　ベクトル，数列 …… 11

**※授業当日までに，該当する講の「予習」を，ノート等に必ず行ってから授業に臨んで下さい。
当日の授業は，予習を行っていることを前提に行われます。**

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1　次の空欄に当てはまる数を答えよ．

[1]　(1)　$2^{\log_8 27}=$ [ア] である．

(2)　$\log_3(x+3)+\log_3(x+5)-\log_3(x+9)=0$ の解は $x=$ [イウ] である．

(3)　$6\cdot 3^x+7\sqrt{3^x}-3=0$ の解は $x=$ [エオ] である．

[2]　$0\leqq x\leqq \pi$ のとき，関数 $y=\sin x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ の最小値は $-\frac{[カ]}{[キ]}$，最大値は $\frac{[ク]}{[ケ]}$ である．

[3]　(1)　n を自然数とする．$(n+1)^3-n^3$ を 6 で割った余りは [コ] である．

(2)　m, n を自然数とする．等式 $2018=m^2-n$ を満たす最小の n は [サ] である．

2

[1]　k は実数の定数，i は虚数単位とする．x の方程式 $(3+i)x^2+(6k+i)x+15=0$ が実数解をもつとき，k の値を求めよ．

[2]　関数 $f(x)=x^2+4x-2tx+t^2-4t+7$（t は定数）について，次の空欄に当てはまる数を求めよ．

(1)　関数 $f(x)$ の最小値は，［ア］である．

(2)　関数 $f(x)+\dfrac{4}{f(x)-2}$ は，$x=t-$［イ］，$t-$［ウ］で最小値［エ］をとる．

ただし，［イ］＜［ウ］とする．

[3]　a が実数のとき，方程式 $x^3-2x^2+ax=0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

3

[1]　3辺の長さが a，$a+ab$，$b+b^2$ である三角形ABCの最も大きい角の大きさを θ とする．

このとき，次の問いに答えよ．ただし，$1<a<b$ かつ $b+b^2<a+ab+1$ とする．

(1)　a，$a+ab$，$b+b^2$ の大小を不等号を用いて表せ．

(2)　$b^2=a^2+1$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を a の式で表せ．

(3)　$a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2+1$ が成り立つとき，三角形ABCの面積 S を求めよ．

[2]　次の□をうめよ．

三角形ABCにおいて，AB＝2，AC＝6，$\cos A=\frac{1}{4}$ とする．頂点Bから辺ACに垂線を引き，その交点をPとし，頂点Cから辺ABに垂線を引き，その交点をQとする．線分BPと線分CQの交点をRとするとき，CR：RQ＝□である．また，四角形AQRPに外接する円の半径は□である．

テキスト解答

【講義問題の解答・解説】

第１講　小問集合，三角比と平面図形

1 [1] (1) $\log_8 27 = \dfrac{\log_2 27}{\log_2 8} = \dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 2^3} = \dfrac{3\log_2 3}{3\log_2 2} = \log_2 3$

よって，$2^{\log_8 27} = 2^{\log_2 3} = 3$

(2) 真数条件より $x+3>0$，$x+5>0$，$x+9>0$

よって，$x>-3$ …… ①

$\log_3(x+3)+\log_3(x+5)=\log_3(x+9)$

$\log_3(x+3)(x+5)=\log_3(x+9)$

$(x+3)(x+5)=x+9$　　$x^2+7x+6=0$　　$(x+6)(x+1)=0$

①より $x=-1$

(3) $3^x=t$ とおく．

$6t+7\sqrt{t}-3=0$　　$6(\sqrt{t})^2+7\sqrt{t}-3=0$

$(3\sqrt{t}-1)(2\sqrt{t}+3)=0$　　$\sqrt{t}>0$ より $\sqrt{t}=\dfrac{1}{3}$　　$t=\dfrac{1}{9}$

よって $3^x=\dfrac{1}{9}=3^{-2}$　　よって $x=-2$

[2] $y=\sin x\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin x\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\sin x\left(\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sin x\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x+\dfrac{1}{2}\sin^2 x$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\dfrac{1}{4}(1-\cos 2x)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)+\dfrac{1}{4}$

$0\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq 2x\leqq 2\pi$　よって $-\dfrac{\pi}{6}\leqq 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{11}{6}\pi$

よって，$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき　最小値は $\dfrac{1}{2}\cdot(-1)+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$

$2x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき　最大値は $\dfrac{1}{2}\cdot 1+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$

[3] (1) $(n+1)^3-n^3=n^3+3n^2+3n+1-n^3=3n^2+3n+1$

$=3n(n+1)+1$

$n(n+1)$ は連続する 2 つの自然数の積，すなわち 2 の倍数である．

よって，$3n(n+1)$ は 6 の倍数であることより，$(n+1)^3-n^3$ を 6 で割った余りは 1

(2)　$2018=m^2-n$ より $n=m^2-2018$

$44^2=1936$，$45^2=2025$ より

求める最小の自然数 n は，$m=45$ のときの $n=45^2-2018=2025-2018=7$

2　[1]　$(3+i)x^2+(6k+i)x+15=0$ が実数解 α をもつとすると，

$(3+i)\alpha^2+(6k+i)\alpha+15=0$　これを変形して

$3(\alpha^2+2k\alpha+5)+(\alpha^2+\alpha)i=0$

k，α は実数より，$\alpha^2+2k\alpha+5=0$ かつ $\alpha^2+\alpha=0$

したがって，$\alpha=-1$，$k=3$

[2] (1)　$f(x)=x^2+4x-2tx+t^2-4t+7=x^2-2(t-2)x+t^2-4t+7$

$$=\{x-(t-2)\}^2+3$$

よって $f(x)$ は $x=t-2$ のとき最小値 3 をとる．

(2)　(1)より $f(x)\geqq 3$　　よって $f(x)-2\geqq 1>0$

したがって，相加平均と相乗平均の関係より

$$f(x)+\frac{4}{f(x)-2}=f(x)-2+\frac{4}{f(x)-2}+2$$

$$\geqq 2\sqrt{\{f(x)-2\}\cdot\frac{4}{f(x)-2}}+2=6$$

等号成立は $f(x)-2=\dfrac{4}{f(x)-2}$　　$\{f(x)-2\}^2=4$　　$f(x)-2=2$

つまり $f(x)=4$ のときであり，それは

$\{x-(t-2)\}^2+3=4$ より $x-(t-2)=\pm 1$　　つまり $x=t-1$，$t-3$ のとき

したがって，$f(x)+\dfrac{4}{f(x)-2}$ は，$x=t-1$，$t-3$ のとき最小値 6 をとる．

[3]　$x^3-2x^2+ax=0$ より $x(x^2-2x+a)=0$

$x=0$ または $x^2-2x+a=0$

$x^2-2x+a=0$ の判別式を D とする．

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot a=1-a$ より

$D>0$ のとき $a<1$，$D=0$ のとき $a=1$，$D<0$ のとき $a>1$

よって，$x^2-2x+a=0$ の異なる実数解の個数は

$a<1$ のとき 2 個　　$a=1$ のとき 1 個　　$a>1$ のとき 0 個

また，$x^2-2x+a=0$ が $x=0$ を解にもつのは $a=0$ のとき．

よって，求める異なる実数解の個数は

$a<0$，$0<a<1$ のとき 3 個

$a=0$，1 のとき　2 個

$a>1$ のとき　1 個

3 [1] (1)　$1<a<b$ より

$(a+ab)-a=ab>0$

$(b+b^2)-(a+ab)=b(1+b)-a(1+b)=(b+1)(b-a)>0$

よって，$a<a+ab<b+b^2$

(2)　最大角の対辺が最大辺より，θ の対辺の長さは $b+b^2$

$$\cos\theta=\frac{a^2+(a+ab)^2-(b+b^2)^2}{2\cdot a\cdot(a+ab)}=\frac{a^2+a^2(1+b)^2-b^2(1+b)^2}{2a^2(1+b)}$$

$$=\frac{a^2+(a^2-b^2)(1+b)^2}{2a^2(1+b)}$$

ここで，$a^2=b^2-1$ より

$$\cos\theta=\frac{b^2-1+(-1)\cdot(1+b)^2}{2a^2(1+b)}=\frac{-2(1+b)}{2a^2(1+b)}=-\frac{1}{a^2}$$

(3)　$a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2+1$ のとき，(2)より $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

$0°<\theta<180°$ より $\theta=120°$　　また，$b^2=a^2+1=\left(\sqrt{2}\right)^2+1=3$ より $b=\sqrt{3}$

よって，$S=\dfrac{1}{2}\cdot a\cdot(a+ab)\cdot\sin 120°=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

[2]　$\triangle$ABP において $\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos A=2\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$\mathrm{PC}=\dfrac{11}{2}$

$\triangle$ACQ において $\mathrm{AQ}=\mathrm{AC}\cos A=6\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{2}$　よって　$\mathrm{QB}=\dfrac{1}{2}$

メネラウスの定理より

$\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}}=1$　　$\dfrac{4}{1}\cdot\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{11}{1}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RC}}=\dfrac{1}{44}$ より CR：RQ＝44：1

$\triangle$ACQ において $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって，$\mathrm{CQ}=\mathrm{AC}\sin A=6\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$ より

$\mathrm{RQ}=\mathrm{CQ}\cdot\dfrac{1}{45}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\cdot\dfrac{1}{45}=\dfrac{\sqrt{15}}{30}=\sqrt{\dfrac{1}{60}}$

したがって，四角形 AQRP に外接する円の半径を r とすると，$\triangle$AQR で正弦定理より $2r=\mathrm{AR}=\sqrt{\mathrm{AQ}^2+\mathrm{QR}^2}=\sqrt{\dfrac{9}{4}+\dfrac{1}{60}}=\sqrt{\dfrac{34}{15}}=\dfrac{\sqrt{510}}{15}$

よって　$r=\dfrac{\sqrt{510}}{30}$